

Agregacja danych o wartościach przedziałowych

Jakub Łompiś
Politechnika Łódzka

Sesja SWPŁ

25.09.2026

LICENCJAT (2020–2023)

Matematyka stosowana

- pierwsze wystąpienia konferencyjne
- pierwsza publikacja naukowa
- indywidualny tok studiów

PRACA LICENCJACKA
„Procesy $CAR(p)$
z szumem gaussowskim”
Promotor: dr Żywilla Fechner

MAGISTERKA (2023–2025)

Matematyka stosowana

- aktywność konferencyjna
- publikacja naukowa
- publikacje pokonferencyjne
- stypendium Ministra

PRACA MAGISTERSKA
„Interval-valued
aggregation functions”
Promotor: dr hab. Michał Boczek

Przykład

Inwestor chce oszacować wartość akcji na podstawie wycen przygotowanych przez różne biura maklerskie. Analitycy mogą wskazywać wartości w postaci przedziałów ze względu na różne założenia dotyczące przyszłych wyników spółki, stosowane modele wyceny czy niepewność prognoz. Załóżmy, że dla akcji spółki X i spółki Y dostępne są następujące wyceny:

	Biuro A	Biuro B	Biuro C	Biuro D
Spółka X	[90, 120]	[75, 130]	[95, 115]	[80, 125]
Spółka Y	[45, 80]	[55, 95]	[60, 85]	[50, 100]

Tabela: Prognozowane wyceny akcji w PLN.

Problem (P1): W jaki sposób uporządkować przedziałowe wyceny akcji tak, aby poznać najbardziej optymistyczny i najbardziej pesymistyczny scenariusz ?

Problem (P2): Jak wyznaczyć zbiorczy przedział wartości akcji na podstawie wielu dostępnych wycen?

Niech $L([0, 1]) := \{[x_1, x_2] \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\}$. Naturalnym częściowym porządkiem na $L([0, 1])$ jest porządek $\leq_2$, tzn.

$$[x_1, x_2] \leq_2 [y_1, y_2] \iff x_1 \leq y_1 \text{ oraz } x_2 \leq y_2.$$

Definicja 1 ([Bustince et al., 2013])

Mówimy, że porządek liniowy $\preceq$ na $L([0, 1])$ jest *dopuszczalny* jeżeli dla dowolnych $[x_1, x_2], [y_1, y_2] \in L([0, 1])$ prawdą jest, że $[x_1, x_2] \preceq [y_1, y_2]$ jeżeli $[x_1, x_2] \leq_2 [y_1, y_2]$.

Jednym z najistotniejszych dopuszczalnych porządków na $L([0, 1])$ jest *porządek- (α, β)* [Bustince et al., 2013], tj. dla dowolnych $[x_1, x_2], [y_1, y_2] \in L([0, 1])$

$$[x_1, x_2] \preceq_{(\alpha, \beta)} [y_1, y_2] \Leftrightarrow \begin{cases} K_\alpha(x_1, x_2) < K_\alpha(y_1, y_2) \text{ lub} \\ K_\alpha(x_1, x_2) = K_\alpha(y_1, y_2) \text{ oraz } K_\beta(x_1, x_2) \leq K_\beta(y_1, y_2), \end{cases}$$

gdzie $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha \neq \beta$ i $K_\gamma(z_1, z_2) = \gamma z_1 + (1 - \gamma)z_2$ dla dowolnych $\gamma, z_1, z_2 \in [0, 1]$.

Porządek- (α, β) uogólnia trzy znane w literaturze dopuszczalne porządki:

- (1) *porządek leksykograficzny* $\preceq_{\text{Lex1}}$ dla $(\alpha, \beta) = (1, 0)$;
- (2) *porządek antyleksykograficzny* $\preceq_{\text{Lex2}}$ dla $(\alpha, \beta) = (0, 1)$;
- (3) *porządek Xu-Yager* $\preceq_{XY}$ dla $(\alpha, \beta) = (0.5, 0)$.

Przykład (cd.)

Do uporządkowania wycen wartości akcji spółki X wykorzystamy najpierw porządek Xu-Yager. Wówczas

$$[80, 125]_D \preceq_{XY} [75, 130]_B \preceq_{XY} [95, 115]_C \preceq_{XY} [90, 120]_A.$$

Zatem, według porządku Xu-Yager najbardziej optymistyczną wyceną jest wycena biura A.

Natomiast, po zastosowaniu porządku leksykograficznego

$$[75, 130]_B \preceq_{\text{Lex1}} [80, 125]_D \preceq_{\text{Lex1}} [90, 120]_A \preceq_{\text{Lex1}} [95, 115]_C$$

lub antyleksykograficznego

$$[95, 115]_C \preceq_{\text{Lex2}} [90, 120]_A \preceq_{\text{Lex2}} [80, 125]_D \preceq_{\text{Lex2}} [75, 130]_B,$$

otrzymujemy odmienne hierarchie wycen. W szczególności, dla porządku leksykograficznego najbardziej optymistyczną opcją jest wycena biura C, natomiast dla antyleksykograficznego wycena biura B.

Definicja 2 ([Grabisch et al., 2009])

Funkcję $A: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ nazywamy *funkcją agregacji*, jeśli

- (a) $A(0, 0) = 0$ oraz $A(1, 1) = 1$,
- (b) A jest rosnąca po obu współrzędnych.

Przykład

Przykładami funkcji agregacji m.in. są $\min\{x, y\}$, $\max\{x, y\}$, średnia arytmetyczna, średnia geometryczna czy średnia harmoniczna.

Definicja 3 ([Nelsen, 2006])

Dwuwymiarową kopułą $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ nazywamy funkcję, spełniającą warunki:

- (a) $C(x, 0) = 0 = C(0, x)$ dla dowolnego $x \in [0, 1]$,
- (b) $C(x, 1) = x = C(1, x)$ dla dowolnego $x \in [0, 1]$,
- (c) $C(x_1, y_1) + C(x_2, y_2) \geq C(x_1, y_2) + C(x_2, y_1)$ dla dowolnych $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$.

Dwuwymiarową kopułę utożsamiamy z dwuwymiarowymi dystrybuantami zmiennych losowych o jednostajnych rozkładach brzegowych, których nośnikiem jest $[0, 1]$ [Nelsen, 2006, Sklar's Thm.].

Przykład

Przykłady dwuwymiarowych kopuł, to:

- (a) $C_P(x, y) = xy$ dla $x, y \in [0, 1]$ tzw. kopuła produktowa,
- (b) $C_M(x, y) = \min\{x, y\}$ dla $x, y \in [0, 1]$.
- (c) $C_L(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$ dla $x, y \in [0, 1]$ tzw. kopuła Łukasiewicza.

Definicja 4 ([Gupta et al., 2023])

Niech $\preceq$ będzie dopuszczalnym porządkiem na $L([0, 1])$. Funkcję $\mathcal{A}: L([0, 1])^2 \rightarrow L([0, 1])$ nazywamy *funkcją agregacji o wartościach przedziałowych* wzg. $\preceq$, jeżeli:

- (a) $\mathcal{A}([0, 0], [0, 0]) = [0, 0]$ oraz $\mathcal{A}([1, 1], [1, 1]) = [1, 1]$,
- (b) $\mathcal{A}$ jest rosnąca wzg. $\preceq$, tj., $\mathcal{A}([u_1, u_2], [v_1, v_2]) \preceq \mathcal{A}([x_1, x_2], [y_1, y_2])$, jeśli $[u_1, u_2] \preceq [x_1, x_2]$ and $[v_1, v_2] \preceq [y_1, y_2]$.

W pracy [Gupta et al., 2023] została zaproponowana następująca funkcja o wartościach przedziałowych.

$\mathcal{A}_C: L([0, 1])^2 \rightarrow L([0, 1])$, gdzie

$$\mathcal{A}_C([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \left[\frac{C(x_1, y_2) + C(x_2, y_1)}{2}, \frac{C(x_1, y_1) + C(x_2, y_2)}{2} \right] \quad (1)$$

dla dowolnych $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$ i dowolnej kopuły C .

Temperatura

$[18, 22] ^\circ\text{C}$

Temperatura w ciągu
dnia

Jakość powietrza

$\text{PM}_{2.5} \in [15, 25] \mu\text{g}/\text{m}^3$

Przedziałowe pomiary
stężenia zanieczyszczeń

Edukacja

$[75, 89]\%$

Przedziałowa ocena
kompetencji ucznia

Dane przedziałowe $\longrightarrow$ Agregacja informacji $\longrightarrow$ Zagregowany przedział



H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, R. Mesiar, Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions, Fuzzy Sets and Systems 220 (2013) 69–77.



V.K. Gupta, S. Massanet, N.R. Vemuri, Novel construction methods of interval-valued fuzzy negations and aggregation functions based on admissible orders, Fuzzy Sets and Systems 473 (2023) 108722.



M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, Aggregation Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2009.



R.B. Nelsen, An introduction to copulas, Springer Science and Business Media, 2006.